ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Examen Final 30/07/2024

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1) a. Para un campo escalar $f: U \subseteq R^n \to R$ defina máximo local y mínimo global de f.
b. Determine, si existen, los puntos de máximo, de máximo local y puntos de silla de la función definida por $f: D \subset R^2 \to R \;\; / \, f(x, y) = x^2 - \cos(y)$ con $D = \left\{(x, y) \in R^2 : \frac{\pi}{2} < y < 3\frac{\pi}{2}\right\}$.

T2) a. Defina líneas de campo de un campo conservativo $\vec{F}: A \subseteq R^2 \to R^2$ e indique la relación con las líneas equipotenciales.

b. Determine las líneas de campo de $\vec{F}(x, y) = (-x\,, 2y - 4x^2)$

P1) Calcule la masa de una chapa cuya forma es la de la superficie *S:*
$S = \{(x, y, z) \in R^3 /\; 4z^2 = x^2 + y^2 \;,\; 0 \le z \le 1\,, 0 \le x \le y\}$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia al plano (*xy*).

P2) Para el campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y, z) = (3x + \frac{\partial h}{\partial x}\,, -2y + \frac{\partial h}{\partial y}\,, 2x^2 + \frac{\partial h}{\partial z})$ determine el flujo saliente a través de la frontera de $T = \{(x, y, z) \in R^3 \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \;,\; z \ge 0\}$ si se sabe que $h: R^3 \to R$ es una función de clase $C^2(R^3)$ y armónica (es decir, su laplaciano $\nabla^2 h = div(\overrightarrow{\nabla h})$ es nulo)

P3) Sean las funciones $\vec{g}: R^3 \to R^2$ y $h: R^2 \to R$ definidas por $\vec{g}(x, y, z) = (x + y + z - 1\,, xy + z^2 - 1)$ y $h(u, v) = \cos(u) + e^v$. Determine la derivada direccional de $f = h \circ \vec{g}$ en el punto (0,0,1) según el vector (1,1,-1).

P4) Dado el campo de fuerzas $\vec{G}(x, y, z) = (ye^{xy} - zsen(xz)\,,\; xe^{xy}\,, -xsen(xz))$, calcule el trabajo realizado por el campo para transportar una partícula de masa a través de la curva parametrizada por $\vec{X}: [0,2\pi] \to R^3 \,/\, \vec{X}(t) = (\cos(t)\,, sen(t)\,, t)$. Justifique claramente el cálculo realizado.

(resuelto por Sylvina)

AM 2	Final	1/3 30-7-24

T1 a) Para un campo escalar $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definir máximo local y mínimo global de f

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{A} \in U$:

$f(\bar{A})$ es máximo local si $f(\bar{A}) \geq f(\bar{x}) \ \forall \bar{x} \in \underbrace{\mathcal{E}(\bar{A})}_{\text{entorno de } A}$

$f(\bar{A})$ es mínimo global si $f(\bar{A}) \leq f(\bar{x}) \ \forall \bar{x} \in U$

b) Determinar, si $\exists$, los puntos de máximo, de máximo local y puntos silla de la función definida por

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = x^2 - \cos(y)$ con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}\}$

f diferenciable $\to$ busco PC : $(x,y) / \nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} f'_x = 0 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 0} \\ f'_y = 0 = \operatorname{sen}(y) \longrightarrow y = k\pi \Rightarrow \boxed{y = \pi} \end{cases}$$

$\boxed{PC = (0, \pi)}$

Analizo si es extremo por el criterio del hessiano:

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = \cos(y) \end{cases} \Rightarrow H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix} \longrightarrow |H(0,\pi)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$(\cos(\pi) = -1)$

$\boxed{\text{No hay extremos}}$

$\boxed{(0, \pi, f_{(0,\pi)}) \text{ es punto silla}}$

T2 a) Definir líneas de campo de un campo conservativo $\bar{F}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e indicar la relación con las líneas equipotenciales.

C es línea de campo, $C: \bar{\gamma}(t) \Rightarrow f(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$

Las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.

b) Determinar las líneas de campo de $\bar{F}(x,y) = (-x, 2y-4x^2)$

$$\bar{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\bar{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t)) \qquad \text{l.c.:} \to (-x, 2y-4x^2) = (x'(t), y'(t))$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{2y-4x^2}$$

$$\frac{2y-4x^2}{-x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$2y - 4x^2 = -xy'$$

$$2y + xy' = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} y = u \cdot v \\ y' = u'v + uv' \end{array}\right\} \to \quad 2uv + x(u'v + uv') = 4x^2$$

$$2uv + xu'v + xuv' = 4x^2$$

$$u(2v + xv') + xu'v = 4x^2$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2v + xv' = 0 & \text{I} \\ xu'v = 4x^2 & \text{II} \end{cases}$$

I $\quad 2v + xv' = 0 \to 2v = -xv' = -x \cdot \frac{dv}{dx} \to -\int \frac{2\,dx}{x} = \int \frac{dv}{v}$

$$-2\ln(x) + c = \ln(v)$$

$$\ln(x^{-2}) + c = \ln(v)$$

$$\underbrace{e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} e^{c} = e^{\ln v}}$$

tomo $k = 1$

$$\frac{k}{x^2} = v \to \boxed{v = \frac{1}{x^2}}$$

II $\quad xu'v = 4x^2 \to u' \cdot \frac{1}{x^2} = 4x$

$$u' = 4x^3 \to \boxed{u = x^4 + c}$$

$$y = u \cdot v = (x^4 + c) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}} + \frac{c}{x^2}$$

$$\boxed{y = x^2 + \frac{c}{x^2}}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	2/3 30/7/24

P1) Calcular la masa de una chapa cuya forma es la de la superficie S:

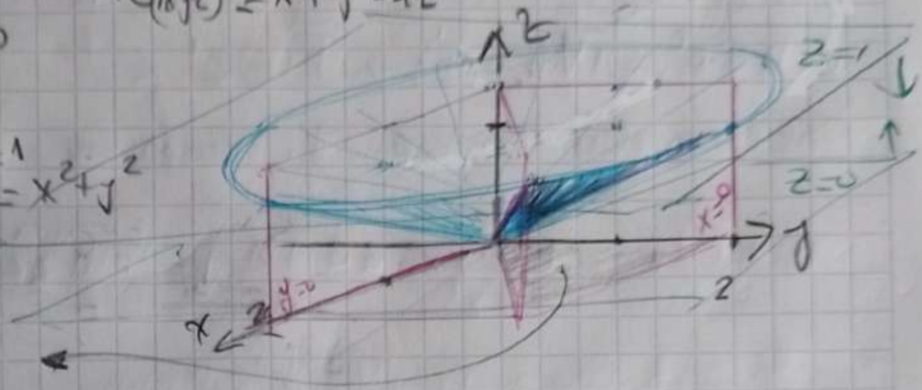
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 4z^2 = x^2+y^2;\ 0 \le z \le 1;\ 0 \le x \le y\}$$

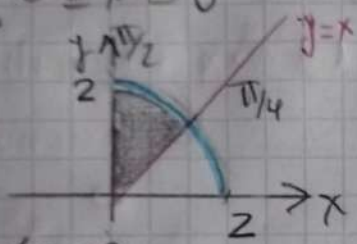
si la densidad, en cada punto, es proporcional a la distancia al plano xy

$G(xyz) = x^2+y^2-4z^2$

$$S \begin{cases} \boxed{4z^2 = x^2+y^2} \rightarrow \text{cono} \\ \boxed{0 < z \le 1} \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

en $z=1$: $4 = x^2+y^2$





$0 \le r \le 2$

$\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$

$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2}{4}} \rightarrow z = \frac{r}{2}$

$\delta(xyz) = k|z|$

$z \ge 0$

$\delta(xyz) = kz$

$$\text{Masa}\ s = \iint_S \delta(xyz)\, ds = \iint_{S_{xy}} kz\, \|N_s\|\, dx\,dy =$$

$N_s = \frac{\nabla G}{G'_z} = \frac{(2x, 2y, -8z)}{8z} = \frac{(x, y, -4z)}{4z}$

$\|N_s\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+16z^2}{16z^2}}$

$\|N_s\| = \frac{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}{4z}$

$16z^2 = 4(4z^2)$

$= k \iint_{S_{xy}} \cancel{z} \frac{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}{4\cancel{z}}\, dx\,dy =$

$= \frac{k}{4} \iint_{S_{xy}} \sqrt{x^2+y^2+4(4z^2)}\, dx\,dy =$

$= \frac{k}{4} \iint_{S_{xy}} \sqrt{x^2+y^2+4(x^2+y^2)}\, dx\,dy =$

$= \frac{k}{4} \iint_{S_{xy}} \sqrt{5(x^2+y^2)}\, dx\,dy =$

C.V $= \frac{k}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \underset{\text{Jac}}{r} \sqrt{5r^2}\, dr\,dt =$

$$= \frac{k\sqrt{5}}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} dt \int_0^2 r^2\, dr = \frac{k\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \boxed{\frac{k\sqrt{5}\,\pi}{6} = \text{Masa}\ s}$$

(resuelto por Sylvina)

(P2) Para el campo vectorial definido por $\overline{F}(x,y,z) = \left(3x + \frac{\partial h}{\partial x}, -2y + \frac{\partial h}{\partial y}, 2x^2 + \frac{\partial h}{\partial z}\right)$ determinar el flujo saliente a través de la frontera de T → $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq 0\}$

Si se sabe que $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ y armónica (es decir: su laplaciano $\nabla^2 h = \operatorname{div}(\nabla h)$ es nulo)

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ semiesfera

- S es sup. frontera del sólido T con normal saliente
- $h \in C^2 \Rightarrow \nabla h \in C^1 \to \overline{F} \in C^1$

Se cumplen las hip. t. Gauss $\Rightarrow \oiint_S \overline{F}\, d\overline{S} = \iiint_T \operatorname{div}(\overline{F})\, dvol$

$\operatorname{div}(\overline{F}) = 3 + h''_{xx} - 2 + h''_{yy} + h''_{zz} = 1 + \underbrace{h''_{xx} + h''_{yy} + h''_{zz}}_{\text{laplaciano} = 0}$

$$\oiint_S \overline{F}\, d\overline{S} = \overbrace{\iiint_T dvol}^{\text{Vol } \frac{1}{2} \text{ esfera}} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3} \cdot \pi r^3 \underset{r=3}{=} \frac{2}{\cancel{3}} \pi \cdot 3^{\cancel{3}^2}$$

$$\boxed{\oiint_S \overline{F}\, d\overline{S} = 18\pi}$$

AM 2	Final	3/3 30/7/24

(P3) Sean las funciones $\bar{g}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por $\bar{g}(x,y,z)=(x+y+z-1,\ xy+z^2-1)$ y $h(u,v)=\cos(u)+e^{v}$.
Determinar la derivada direccional de $f=h\circ\bar{g}$ en el punto $(0,0,1)$ según el vector $(1,1,-1)$

h y $\bar{g}$ son funciones diferenciables $\to$ f es diferenciable

$$f=h(\bar{g})\ \longrightarrow\ f'((0,0,1),\breve{v})=\nabla f(0,0,1)\cdot\breve{v}$$

$$\vec{v}=(1,1,-1)\ \to\ \breve{v}=\frac{(1,1,-1)}{\|\vec{v}\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\breve{v}$$

$$f \text{ dif} \Rightarrow Df(0,0,1)=Dh(\bar{g}(0,0,1))\cdot D\bar{g}(0,0,1)$$

- $\bar{g}(0,0,1)=(0+0+1-1,\ 0\cdot 0+1^2-1)\to\bar{g}(0,0,1)=(0,0)$

$$Df(0,0,1)=Dh(0,0)\,D\bar{g}(0,0,1)$$

- $Dh(u,v)=[-\operatorname{sen}(u)\quad e^{v}]\to Dh(0,0)=[0\quad 1]$
- $D\bar{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&1&1\\ y&x&2z\end{pmatrix}\to D\bar{g}(0,0,1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$Df(0,0,1)=[0\quad 1]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}=[0\quad 0\quad 2]$$

$$\boxed{\nabla f(0,0,1)=(0,0,2)}$$

$$f'((0,0,1),\breve{v})=(0,0,2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{f'((0,0,1),\breve{v})=\frac{-2}{\sqrt{3}}}$$

(resuelto por Sylvina)

P4) Dado el campo de fuerzas $\bar{G}(x,y,z) = (\overbrace{ye^{xy} - z\,sen(xz)}^{P}, \overbrace{xe^{xy}}^{Q}, \overbrace{-x\,sen(xz)}^{R})$

Calcular el trabajo realizado por el campo para transportar una ~~tiesto~~ partícula de masa a través de la curva parametrizada por

$\bar{X}:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\bar{X}(t) = (\cos(t), sen(t), t)}_{C}$. Justificar

$\bar{X}(0) = (1, 0, 0) \to$ inicio $= A$

$\bar{X}(2\pi) = (1, 0, 2\pi) \to$ fin $= B$

$A \neq B \Rightarrow$ No es curva cerrada

Analizo si el campo es conservativo

- G tiene funciones elementales en sus componentes

$\boxed{G \in C^1}$ ✓ $\quad dom(G) = \mathbb{R}^3$ ✓

Analizo si es irrotacional

$$\bar{G} = (P, Q, R) \Rightarrow rot(G) = (R'_y - Q'_z,\ R'_x - P'_z,\ Q'_x - P'_y)$$

$$rot(\bar{G}) = (0-0,\ -\cancel{sen(xz)} - x\cos(xz)z \cancel{+ sen(xz)} + z\,sen(xz)x,\ e^{xy} + xe^{xy}y - e^{xy} - ye^{xy}x)$$

- $rot(\bar{G}) = (0,0,0)$

Es campo conservativo $\to$ independencia del camino

L es el segmento que va de A a B

$L: \bar{\beta}(t) = (1, 0, t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\bar{\beta}'(t) = (0,0,1)$

$$\int_C \bar{G}\, d\bar{e} = \int_L \bar{G}\, d\bar{e} = \int_0^{2\pi} \bar{G}(\bar{\beta}(t))\, \bar{\beta}'(t)\, dt =$$

$\boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{matrix}}$

$$= \int_0^{2\pi} (0 - t\,sen(1 \cdot t),\ e^0,\ -sen(t))(0,0,1)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -sen(t)\, dt = 0$$

$$\boxed{\int_C \bar{G}\, d\bar{e} = 0}$$

(resuelto por Sylvina)